数理解析研究所講究録
5巻 1965年 67-82

C^* ー代数について

岡山大学理学部　　富　田　　稔

C^*ー代数の研究の歴史は比較的に新しい。可換な C^*ー代数が定義されて，それについて有名な I. Gelfand の表現論が発表されたのは，1940年以後の事である。一方非可換な場合の研究は最近までどちらかといえば V. Neumann 代数に関するものか，その理論を C^*ー代数へ応用したものが主であつた。一般の C^*ー代数の構造をもつと精密に調べようとする機運が高まつたのは1956年以後，特に Glimm (9) や Fell (5) の仕事が発表された1960年前後からの事である。

さて上記の二論文は C^*ー代数の構造を調べる二つの立場をそれぞれ代表しているようである。 Glimm は GCR 代数について著しい研究を行つたが，特に C^*ー代数が可分である場合それがI型である事，GCRである事，さらにその dual が smooth である事が，皆同一条件である事を示して， Mackey (12) が主張したように Borel 構造の研究が可分な C^*ー代数では特に有効である事を示した。之はその後の C^*ー代数での Borel 構造論が発展する基礎を作つたものであると見られている。

一方 Fell は C^*ー 代数の位相的な構造を研究し，特に斉次 C^*ー代数を局所 compact 空間上の Fibre bundle 上に表現する事に成功した。此の Fell の仕事を継いで J. Dixmier は斉次 C^*ー代数の Homology group を研究して，それが「初等的に」なる為の必要十分条件を見出した。又， Fell の方法を拡張して GCT (Generalized continuous trece)を研究した。

Fell の研究からも分るように，一般の C^*ー代数の研究では，一般化された fibre bundle としての Continuous direct sum 或は Banach bundle の研究

が close up されるが，特に Hilbert bundle の上で定義された C^*−代数の構造を研究する問題が重要になつて来る。本講演では，その問題を中心として述べてみたい。

§1. C^*− 代数とその dual

C^*−代数 $\mathfrak{A}$ の既約表現全体の集合の中で，互に unitary 同値なものは，同一視する事によつて得られる空間 $\hat{\mathfrak{A}}$ を $\mathfrak{A}$ の dual という。$\mathfrak{A}$ の既約表現と，その極大右 ideal とは 1対1 に対応するので $\hat{\mathfrak{A}}$ の各々の要素に対応して，ある primitive ideal が定まるが，その中元 ideal space の hull−kernel topology（Jacobson (10)， Kaplansky (11) ）を導入して，$\hat{\mathfrak{A}}$ を位相空間であると考える。この位相は $\mathfrak{A}$ の既約な state 全体に弱位相を入れた空間 E から $\mathfrak{A}$ 上への自然写像を行つて， E の位相を $\hat{\mathfrak{A}}$ へ誘導して得られるものと一致する。$\hat{\mathfrak{A}}$ の中には二種類の Borel 構造が定義される，一つは $\hat{\mathfrak{A}}$ の位相から導かれる「位相的 Borel 構造」で他は E の（弱位相から導かれる） Borel 構造を $\hat{\mathfrak{A}}$ へ誘導して得られる「誘導 Borel 構造」である。そして通常 $\hat{\mathfrak{A}}$ の Borel 構造という場合は後者をさすが，之が standa−rd である時 dual $\hat{\mathfrak{A}}$ は smooth であるという。

$\mathfrak{A}$ はその Hilbert 空間上への表現代数の弱閉包が常に I 型の時 I 型の C^*−代数といい，その Hilbert 空間上への既約表現によつて，いつでも compact operator 全体の環に表現されるとき，CCR であるという。又 $\mathfrak{A}$ を最終値とする $\mathfrak{A}$ の ideal の超限系列 $0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{A}$ を $\mathfrak{A}$ の合成列と呼ぶが，隣接項の商 N_{i+1}/N_i がすべて CCR であるような合成列が存在するとき，$\mathfrak{A}$ は GCR であるといい， $\mathfrak{A}$ の dual $\hat{\mathfrak{A}}$ が T_3−空間であるとき $\mathfrak{A}$ は Hausdorff C^*−代数であるという。
Glimm は GCR 代数を研究して次の結果を得た。

定理． (1)．$\mathfrak{A}$ が GCR である事 (2)． dual $\hat{\mathfrak{A}}$ が smooth な事，(3)．$\hat{\mathfrak{A}}$ の位相的 Borel 構造と誘導 Borel 構造が一致する事， (4)．$\hat{\mathfrak{A}}$ が T_0− 空間である事， (5)．（$\mathfrak{A}$ が可分な時） I 型である事。
以上 5 つの条件は同等である。

一方 Fell は dual $\hat{\mathfrak{A}}$ の位相的な性質について， (1)．$\hat{\mathfrak{A}}$ が Conpact な事， (2)．$\hat{\mathfrak{A}}$ が T_1− 空間である事と $\mathfrak{A}$ が CCR である事が同等である事，を示し，又 Kaplansky (11) は CCR が Hausdorff C^*−algebra の合成列をもつ事を示した。以上の事から GCR の構造の研究は次の二つの問題に分れる。

1. Hausdorff CCR の構造の研究

2. $\mathfrak{A}$ の ideal N と $\mathfrak{A}/N$ の構造が分っている時，それから $\mathfrak{A}$ の構造をきめる問題。

此の中2番目は大変困難な問題で殆んど研究されていないようである。

§2. 一般化された fibre bundle

いわゆる Banach 空間の連続和は，ある意味で fibre bundle の一般化であるので，その用語をそのまま用いる事にする。

Banach bundle とは次のような空間の系 ($\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$, Ω , $\mathcal{L}_\lambda$) である。(1) 局所 Compact Hausdorff 空間 Ω (base space) ，Ωの各点 λ で定義された Banach 空間 $\mathcal{L}_\lambda$ (fibre space at λ) ，Cross section全体の Banach 空間$\mathcal{F}$ (fild space) 及び Ω の点 λ と fibre space $\mathcal{L}_\lambda$ の点x の対 (λ , x) 全体からなる位相空間 $\mathcal{L}$ (space of Bundle) 。このような系の間には次の条件が満足されていなければならない。

2.1. Cross section x は λ で B_λ の値をとる Ω の函数で，しかもその norm$\|x(\lambda)\|$は Ω 上で連続で， $\lambda \to \infty$ ならば $\|x(\lambda)\| \to 0$ である。

2.2. もし，x, y が cross section で α が複素数ならば αx , $x+y$ も cross section である。

2.3. field space F は条件2.1， 2.2 のもとで極大な函数の集合である。

2.4. 写像 $x \in F \to x(\lambda)$ によって，F は $\mathcal{L}_\lambda$ の中に稠密に (実は onto) 写像される。

F は従って次の norm をもつ Banach space である。

2.5. $\|x\| = \sup(\|x(\lambda)\| : \lambda \in \Omega)$.

$\mathcal{L}$ の位相は次のように定義される。Bの点を (λ, a) , ε を正数，λ の近傍を V， a を通る cross section を x として，$U((\lambda, a); \varepsilon, V, x)$ を集合 $\{(\mu, y) \in B : \mu \in V, \|x(\mu) - y\| < \varepsilon\}$ とすれば，ε や V を色々かえて点 (λ, a) の完全近傍系を作る事が出来る。

もし Banach bundle の fibre space が全部 Hilbert 空間の時は，之を Hilbert Bundle, Euclid 空間の時は Euclidean space と呼ぶ。

fibre space が C^*-algebra で field space が C^*-algebraになつ

ている時，これを C^*－algebra bundle と呼び field space を field algebra という。 Glimm は次の定理を示した。

定理2.6 (Glimm) C^*－algebra bundle ($\mathcal{L}$, $\mathfrak{A}$, Ω, $\mathfrak{A}_\lambda$) の field algebra の部分 C^*－代数 $\mathfrak{A}_0$ で分離的な (即ち $\mathcal{L}$ の二点 (λ, a), (μ, b) ($\lambda \neq \mu$ を通る $\mathfrak{A}_0$ の要素が必らずある) ものは $\mathfrak{A}$ 以外にない。

定理2.7. (Gimm) $\mathfrak{A}$ が Hausdorff dual をもつ為の必要十分条件は，$\mathfrak{A}$が simple CCR の C^*－algebra bundle になる事である。

(注意. Hilbert 空間上の Compact 作用素全体に一致するCCR は simple であるという。)

もし Banach bundle が通常の意味の fibre である Banach 空間 B 及び基本群 G で定義された fibre bundle で，その各点での fibre space $\mathcal{L}_\lambda$ は Bと等長同型であり基本群が B の等長同型群であるとき我々はこれを斉次な Banach bundle という。また斉次な C^*－ 代数とは，その既約表現の表現環が常に定次数の全行列環と同型なものをいうが

定理2.8. (Fell) n 次の斉次 C^*－代数は n 次の全行列環 M_n を fibre, M_n の unitary 自己同型群を基本群とする斉次な C^*－algebra bundle の field algebra である。

今後 ($\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$, Ω, H_λ) は Hilbert bundle であるとする。

Ω上の函数 A でその点 λ での値が H_λの有界線型作用素であるようなものを Ω 上の operater field という。 operator field A は，その norm $|A(\lambda)|$ が Ω 上で連続で $\lambda \to \infty$ の時 $|A(\lambda)| \to 0$ であれば norm 連続であるといい，又，A 及び A^*が共に Ω の cross section を cross sectionにうつす時，可伴 (adjointive) であるという。ただし A^*は $A^*(\lambda) = A(\lambda)^*$ で定義される operator field であり cross section x に対して Ax は $(Ax)(\lambda) = A(\lambda)\ x(\lambda)$ によつて定義される。 Ω 上の連続函数 f で $\lambda \to \infty$ の時 $f(\lambda) \to 0$ となるものは norm 連続な可伴 operator field である。このような函数全体の環を $C(\Omega)$ であらわす。それは$\mathcal{L}$ 上の可伴な operator field 全体の C^*－代数 $\mathfrak{A}(\mathcal{L})$ の center に含まれる。$\mathcal{L}$上の operator field の作る C^*－代数$\mathfrak{A}$が $C(\Omega)$ の要素を掛けてもやはり $\mathfrak{A}$ に属する時，之を $\mathcal{L}$上の field C^*－algebra という。field C^*－algebra の要素が全部 norm

連続ならば，之を CFC*A (Continuous field C*－algebra) といい，また CFC*A $\mathfrak{A}$ の各点 λ での表現環が H_λ 上の simple CCR であれば $\mathfrak{A}$ を $\mathcal{L}_a$ 上のCFCCR (Continuous field CCR) という。今 a，bを $\mathcal{L}_a$ の cross section とすれば P_{ab} を $(P_{ab}\,x)\ (x)=(x(\lambda),a(\lambda))\,b(\lambda)$ で定義される operator field として，P_{ab} を含む最小の field C*－algebra を EFCCR (Elementary field CCR)，またその要素を elementary operator field という。Fell が示したように斉次な Euclidean bundle 上の norm 連続な operator field で cross section を cross section にうつすものは必ず elementary operator field になるが，一般には norm 連続で cross section を cross section にうつしても必ずしも可伴でなく，或は可伴で Ω が compact でも必ずしも norm 連続でない。更にCFCCR と EFCCR は必ずしも一致しない。之を示す為に次の Euclidean bundle $(\mathcal{L}_a,\mathcal{F},C,E(z))$ を考えよう。

Cは単位円周 $|z|=1$，$E(z)\ (z\neq 0)$ はn次元，$E(0)$ はm次元 (但し $m\leqq n$) の複素 Euclid 空間で，それらの要素はそれぞれ座標を用いて $x=(x_1,\cdots x_n)$ および $x=(x_1\ \cdots\ x_m)$ であらわされる。Cross section x は $x(z)=(x_1(z)_1\cdots,x_n(z))(z\neq 0)$　$x(0)-(x_1(0),\cdots,x_m(0))$ であつて各々の $x_i(z)$ は $z\neq 0$ で連続，$z\to 0$ の時 $x_i(z)\to x_i(0)\ (i\leqq m)$，$x_j(z)\to 0\ (j\geqq m+1)$ となるようなものである。今 $\mathcal{L}_a$ 上の operator field A における値を次の行列であらわす。

$$A(z)=\begin{pmatrix}A_{11}(z) & A_{12}(z)\\ A_{21}(z) & A_{22}(z)\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11}(z) & \cdots & a_{1m}(z) & a_{1\,m+1}(z) & \cdots & a_{1n}(z)\\ a_{m}(z) & \cdots & a_{mm}(z) & a_{mm+1}(z) & \cdots & a_{mn}(z)\\ \hline a_{m+1}(z) & \cdots & a_{m+1m}(z) & a_{m+1m+1}(z) & \cdots & a_{m+1n}(z)\\ a_{m}(z) & \cdots & a_{mn}(z) & a_{nm+1}(z) & \cdots & a_{nn}(z)\end{array}\right)$$

$$A(0)=\begin{pmatrix}a_{n}(0) & \cdots & a_{1m}(0)\\ a_{m_1}(0) & \cdots & a_{mm}(0)\end{pmatrix}$$

この時 Aが cross section を cross section に移す為には $A_{11}(z)\to A(0)$，$A_{21}(z)\to 0\ (z\to 0)$ および $A(z)$ が有界であればよい。A が可伴な為の条件は，更に A が $A_{12}(z)\to 0\ (z\to 0)$ を満たす事である。$A_{22}(z)$ は有界でさえあ

ればよいから norm 連続とは限らない。一般に $\mathcal{L}_\Omega$ 上のCFCCRは次のようなものである。今 X が m 次行列であるとき φ_1 (X) および φ_2 (X) を次の形のn－m次行列とする。

$$\varphi_1(X) = U^{-1}\begin{pmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & X_k^0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} U, \varphi_2(X) = V^{-1}\begin{pmatrix} X' & & 0 \\ & \ddots & X_e^l \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} V,$$

ここに U, V は unitary 行列であり X_i, X_j^l は全部 X と同じ行列である。

そこで $\mathcal{L}_\Omega$ 上の可伴作用素 A で $\varepsilon \to +0$ の時 $A_{22}(e^{i\varepsilon}) \to \varphi_1(A(0))$ $A_{22}(e^{-i\varepsilon}) \to \varphi_2(A(0))$ をみたすもの全体を $\mathfrak{A}$ とすれば，之はCFCCRである。このように例え Euclidean bundle の上の field C^*－algebra の構造でも決して簡単ではないので別の観点からその構造を研究する必要がある。

§3. Innerform 空間

Hilbert bundle ($\mathcal{L}_\Omega$, $\mathcal{F}$, Ω, H_λ) 上の field C^*－algebra は，その field space $\mathcal{F}$ 上の作用素環と考えられるから，一般に Banach 空間上の作用素環として表現された C^*－代数を研究する事が重要な問題となつてくる。

いま線型空間 $\mathcal{L}$ と Banach*－空間 B があつて，$\mathcal{L}$ 上に B の値をとる $*$－対称な双線型型式 (x, y) が定義されているとする。従つて (x, y) は $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ から B への写像で次の条件をみたしている。

3.1. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$

3.2. $(x, y) = (y, x)^*$

3.3. $(z, \alpha x + \beta y) = \bar{\alpha}(z, x) + \bar{\beta}(z, y)$

その時更に (x, y) が次の条件 3.4, 3.5. をみたせば (x, y) を $\mathcal{L}$ の innerform といい，Innerform の定義された線型空間を Innerform 空間という。

3.4. $|(x, y)|^2 \leq |(x, x)|\,|(y, y)|$

3.5. $(x, x) = 0$ ならば $x = 0$

定理. 線型空間 $\mathcal{L}$ が Innerform(x, y) をもてば $\mathcal{L}$ は norm

3.6. $\|x\| = |(x, x)|^{1/2}$

によつて norm 空間である。もし $\mathcal{L}$ の双線型形式 (x, y) が条件 3.4. だけをみた

せば3.6. の $\|x\|$ は $\mathcal{L}$ の pseudo－norm である。

条件 3.4. は見かけ上之より弱い条件

3.4′ $\left|(x, y)+(y, x)\right| \leqq \left|(x, x)\right|+\left|(y, y)\right|$

でおきかえる事が出来る。

Norm 空間 $\mathcal{L}$ があるとき条件3.4 をみたすような $\mathcal{L}$ の innerfom を admissible な innerform という。

定理3.7. どんな norm 空間にも admissible innerform は少くとも一つ定義される。しかしそのような innerform は一般に唯一つとは限らない。

定理3.8. Innerform の定義された norm 空間を完備化した Banach 空間の中へ，もとの空間の innerform は admissible であるように一意に拡大される。

定理3.7.によつて，innerform は線型空間の中でその norm による距離構造よりも詳しいある種の構造を定義するものである事がわかる。 Innerform の定義された線型空間を Innerform 空間，また Banach 空間である Innerform 空間をＩＢ空間と呼ぶ事にする。$\mathcal{L}_1$，$\mathcal{L}_2$ は同じ Banach*－空間上のＩＢ－空間であるとする。今，$\mathcal{L}_1$ から $\mathcal{L}_2$ への写像 A に対して他の $\mathcal{L}_2$ から $\mathcal{L}_1$ への写像 A^* があつて常に

3.9. $(Ax, y)=(x, A^*y)$ をみたしているとき

A^* を A' の同伴作用素（adjoint）という。一般に adjoint のある作用素 A を可伴（adjointive）作用素という。 $\mathcal{L}_1$ から $\mathcal{L}_2$ への可伴作用素は有界且線型だが，有界線型作用素でも可伴であるとは限らない。

定理3.10. あるＩＢ空間 $\mathcal{L}$ 上の可伴作用素全体は C^*－代数である。

C^*－代数はこの Innerform の定義を用いて

3.11. C^*－代数とは自動的に admissible な innerform $(A, B)=B^*A$ をもつ Banach*－代数である。

と定義出来る，3．11 の条件は

$$|A|=|(A, A)|^{\frac{1}{2}}=|A^*A|^{\frac{1}{2}}$$

であるから全く通常の C^*－代数の定義を云いかえたものにすぎない。

ＩＢ空間 $\mathcal{L}$ 上の可伴作用全体からなる C^*－代数を $\mathfrak{A}(\mathcal{L})$ とすれば，その中に強＊－位相が次のようにして定義される。それは $\mathcal{L}$ の要素 x をもとにして作られる $\mathfrak{A}(\mathcal{L})$ の semi－norm $\|Ax\|$，$\|A^*x\|$ 全体を base とする $\mathfrak{A}(\mathcal{L})$ の局所凸線型位

相である。この強＊－位相に関して次の Kaplansky 稠密定理が成立する。

3. 12. I B空間 $\mathcal{L}$ 上の C^*－代数を $\mathfrak{A}$ とするとき，$\mathfrak{A}$ の強＊－閉包である C^*－代数 $\mathfrak{A}^s$ の単位球は，$\mathfrak{A}$ の単位球の強＊－閉包に等しい。

その証明は Hilbert 空間の場合の証明（Dixmier (1)）を少し変形して得られる。

§4. C^*－modul と C^*－form 空間

Banach ＊－空間 $\mathcal{L}$ の自己共役部分が準順序 Banach 空間であるとき $\mathcal{L}$ を準順序 Banach ＊－空間と呼ぶ。ここに準順序 Banach空間とは実線型準順序空間で Banach 空間であり，しかもその norm が条件

4.1 $x \geqq y \geqq -x$ ならば $|x| \geqq |y|$

をみたすものをいう。

線型空間 $\mathcal{L}$ と準順序＊－Banach 空間 $\mathcal{L}_0$ があるとする。$\mathcal{L}_0$ の値をとる $\mathcal{L}$ 上の＊－symmitric な双線型型式 (x, y) が次の条件

4.2 $(x\ x \geqq 0$ $x \neq 0$ ならば $(x, x) \neq 0$

をみたせば (x, y) を $\mathcal{L}$ 上の正値形式 (positive form) という。

定理4.3 Positive form は innerform である。

定理4.3 は positive form が条件 3.4 をみたす事から直にわかる。

positive form をもつ線型空間を positive form空間，またそれが互に Banach 空間である時はPB空間と呼ぶ。PB空間で特に重要なのは次に定義する C^*－modul である。

線型空間 C が C^*－代数 $\mathfrak{A}$ を係数とする右（左）C^*－modul であるというのは，それが $\mathfrak{A}$ を係数とする右側（左側）modul になっていて，しかも $\mathcal{L}$ に $\mathfrak{A}$ の値をとる positive form (x, y) によってPB－空間であり，その form (x, y) が次の条件をみたす場合である。

4.4 $(xA, y) = (x, y)A$ （右側の場合）

4.5 $(Ax, y) = A(x, y)$ （左側の場合）

C^*－代数 $\mathfrak{A}$ はその positive form $(A, B)_r = B^*A$，$(A, B)_e = AB^*$ によって，右側及び左側 C^*－modul になっている。

定理4.6 $\mathfrak{A}$ を係数とする（右，左）C^*－modul $\mathcal{L}$ 上の可伴作用素は常に $\mathfrak{A}$ と

可換である。

定理4．7　C^*－代数 $\mathfrak{A}$ を係数とする positive form 空間 $\mathcal{L}$ が適当な $\mathfrak{A}$ を係数とする（右左）C^*－modul に含まれる為の必要且十分条件は $\mathcal{L}$ の form (x, y) が次の条件をみたすことである。

4．8　$\sum_{ij} A_i (x_i, x_j) A_j^* \geqq 0$　（右側の場合）

4．8′　$\sum_{ij} A_j^* (x_i, x_j) A_i \geqq 0$　（左側の場合）

ただし，$x_1 \cdots x_n$ は $\mathcal{L}$ の要素，$A_1 \cdots A_n$ は $\mathfrak{A}$ の要素である。
4．8（4．8′）をみたす positive form を夫々右（左）C^*－form といい，この意味の右（左）C^*－form をもつ空間を右（左）C^*－form 空間，さらにそれがBanach 空間ならばC^*－B空間という。

条件4．8　4．8′は夫々次の条件に等しい。任意の $\mathcal{L}$ の要素 $x_1, \cdots x_2$ に対して，

4．9
$$\begin{pmatrix} (x_1\ x_1) & \cdots\cdots & (x_1, & x_n) \\ \vdots & & & \\ (x_n, x_1) & \cdots\cdots & (x_n, & x_n) \end{pmatrix} \geqq 0 \qquad \text{（左側の場合）}$$

$$\begin{pmatrix} (x_1\ x_1) & \cdots\cdots & (x_n, & x_1) \\ \vdots & & & \\ (x_1, x_n) & \cdots\cdots & (x_n, & x_n) \end{pmatrix} \geqq 0 \qquad \text{（右側の場合）}$$

定理4．10　もし $\mathcal{L}_0$ が $\mathfrak{A}$ の部分代数で $\mathcal{L}$ が $\mathcal{L}_0$ を係数とする（右，左）C^*－form 空間ならば，それは $\mathfrak{A}$ を係数としても（右，左）C^*－form 空間である。
positive form space と右 C^*－form space の Tensor 積を次のように定義する。
今 $\mathcal{L}$ は $\mathfrak{A}$ を係数とする C^*－space，また $\mathfrak{M}$ は PB space で $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{M}$ 上の C^*－代数へ表現されていると仮定する。この時 $\mathcal{L}$ と $\mathfrak{M}$ の Tensor 積 $\mathcal{L} \otimes_1 \mathfrak{M}$ とは次のようにして定義されるPB空間である。$\mathcal{L}$ と $\mathfrak{M}$ の代数的な Teusor 積 $\mathcal{L}\mathfrak{M}\otimes$ を考える。その要素 $\sum x_i \otimes u_i$ で，

4．11　$\sum_{i=1}^{n} (\alpha, x_i) u_i = 0$　$(\alpha \in \mathcal{L})$

をみたすもの全体をnとすれば，空間 $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} / \mathcal{N}$ は次のような positive form をもつ

$$4.12 \quad (\Sigma x_i \otimes u_i / \mathcal{N}, \Sigma y_j \otimes v_j / \mathcal{N}) = \sum_i \sum_j ((x_i y_j) u_i, v_j)$$

之を完備化して得られるPB空間が Tensor 積 $\mathcal{L} \otimes_I \mathcal{M}$ である。$\mathcal{M}$ が C^*－modul（または C^*－B空間）ならば Tensor 積 $\mathcal{L} \otimes_I \mathcal{M}$ もそうである。
$\mathcal{L}$ が $\mathfrak{A}$ の値をとる C^*－B空間であるとき Tensor 積 $\mathcal{L} \otimes_I \mathfrak{A}$ は $\mathcal{L}$ を含む右 C^*－modul である。之を $\mathcal{L}$ の C^*－modul 化という。$\mathfrak{A}$ 値右 C^*－B 空間 $\mathcal{L}$ とあるPB空間 $\mathcal{M}$ の Tensor 積 $\mathcal{L} \otimes_I \mathcal{M}$ があるとき，$\mathcal{L}$ 上の可伴作用素 A および $\mathcal{M}$ 上の可伴作用素 B で $\mathfrak{A}$ と可換なものを次の方法で $\mathcal{L} \otimes_I \mathcal{M}$ 上の可伴作用素に拡げたものをA（B）から $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ 上に誘導した作用素という。

$$4.13 \quad A(\Sigma x_i \otimes u_i) = \Sigma (A x_i) \otimes u_i$$

$$4.14 \quad B(\Sigma x_i \otimes u_i) = \Sigma x_i \otimes (B u_i)$$

$\mathcal{L}$ 上の C^*－代数，あるいは $\mathcal{M}$ 上で $\mathfrak{A}$ と可換な C^*－代数は上の方法によつて Tensor 積 $\mathcal{L} \otimes_I \mathcal{M}$ 上の C^*－代数に誘導される。実際 Von Neumann代数の射影に関する Induction 及び Reduction の議論（Dimier (1)）は上の特別な場合と考えられる。Hilbert bundle $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, \Omega, H_\lambda)$ と Ω 上の測度 μ があるとき，$\mathcal{F}$ から作られる direct integral の Hilbert 空間は Tensor 積を用いて次のように定義される。今 μ から作られる通常の2乗可積分可測函数のHilbert 空間 $L^2(\mu)$ とし，$\mathcal{F}$ を連続函数環 $C(\Omega)$ を係数とした右 C^*－modul であると考えれば μ による direct integral $\int_\oplus H_\lambda$ は Tensor 積 $\mathcal{F} \otimes_I L^2(\mu)$ である。

C^*－代数 $\mathfrak{A}$ から準順序 Banach ＊－空間 $\mathcal{L}_a$ への写像 φ が $\varphi(A^* A) \geqq 0$ をみたすとき之を正値写像という。φ が上の意味の正値写像であれば「φ に対する $\mathfrak{A}$ の表現」が次の方法によつて構成される。今 $\mathcal{N}$ を $\varphi(A^* A) = 0$ をみたす A 全体の作る $\mathfrak{A}$ の左 ideal であるとして，剰余空間 $\mathfrak{A} - \mathcal{N}$ をその positive form

$$4.15 \quad (A - \mathcal{N}, B - \mathcal{N})_\varphi = \varphi(B^* A)$$

によつて完備化して得られる空間 $\mathfrak{A}(\varphi)$ を考える。この時 $\mathfrak{A}(\varphi)$ はPB空間で，$\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A}(\varphi)$ 上の可伴作用素の作る C^*－代数に表現される。

一般に，$\mathfrak{A}$ があるPB空間 $\mathcal{L}$ 上の可伴作用素の C^*－代数に表現されているとすれば

$\mathcal{L}$の任意の要素をxとして $A \in \mathfrak{A} \to (Ax, x)$ は正値写像で，之に対して出来る空間 $\mathfrak{A}$ (φ) は $(Ax : A \in \mathfrak{A})$ がその中で稠密な $\mathcal{L}$ の閉部分空間であるが，逆に正値写像 φ によつて作られた空間 $\mathfrak{A}(\varphi)$ は，ある適当なＰＢ空間の要素xから生成されたものと考える事が出来る。

(このように $\mathfrak{A}(\varphi)$ をＰＢ空間に embed しても，xは $\mathfrak{A}$ (φ) に属するとは限らない。また φ の値域である準順序 Banach ＊－ 空間も適当に拡大せねばならない)

正値写像の中で重要なのは，C^*－代数$\mathfrak{A}$から他の C^*－代数$\mathcal{L}_a$への正値写 φ で，その表現空間 $\mathfrak{A}(\varphi)$ が右 C^*－B空間になるものである。このような写像を我々は右 C^*－写像とよぶ。

定理4．16　$\mathfrak{A}$ から$\mathcal{L}_a$への写像 φ が右 C^*－写像である為の必要十分条件は，それが線型で，次の条件

4．17　$\Sigma X_i^* \varphi(A_j^* A_i) X_j \geqq 0$

$(A_1 \cdots A_n \in \mathfrak{A}, X_1, \cdots X_n \in \mathcal{L}_a)$ をみたす事である。

§5. Hilbert bundle と C^*－modul

§4の議論で特に係数$\mathfrak{A}$が可換な C^*－代数である場合を考える。このとき線型空間$\mathcal{L}$の$\mathfrak{A}$値 positive form は必ず C^*－form でありまた$\mathfrak{A}$を係数とする右又は左 C^*－modul は必ず両側 modul である$\mathfrak{A}$はある局所 Compact 空間 Ω 上の連続函数で無限遠点で0に近ずくもの全体の環C (Ω) に同型である。

定理5．1　Hilbert bundle $(\mathcal{L}_a, \mathcal{F}, \Omega, H_\lambda)$ の field space $\mathcal{F}$は $C(\Omega)$ を係数とする C^*－modul であり，逆に可換な C^*－代数$\mathfrak{A}$を係数とする C^*－modul $\mathcal{F}$は適当な Hilbert bundle $(\mathcal{L}_a, \mathcal{F}, \Omega, H_\lambda)$ の fjeld space になる。

定理5．2　Hjlbert bundle $(\mathcal{L}_a, \mathcal{F}, \Omega, H_\lambda)$ において$\mathcal{F}$上の可伴な作用素Aは$\mathcal{L}_a$上の可伴な operator fjeld と一致する。

定理5．3　$\mathfrak{A}$が Hilbert bundle $(\mathcal{L}_a, \mathcal{F}, \Omega, H_\lambda)$ 上の field C^*－ 代数であれば，$\mathfrak{A}$の H_λ 上への表現を $\mathfrak{A}_\lambda$ とするとき，写像 $A \to A_{(\lambda)}$ は$\mathfrak{A}$の単位球を $\mathfrak{A}_\lambda$ の単位球へうつす。

定理5．4　上の$\mathfrak{A}$に対して，ある可伴な operator field A が $\mathfrak{A}$の強＊－閉包 $\mathfrak{A}\lambda^5$ に属する為の必要十分条件は Ω の各点 λ で A_λ が $\mathfrak{A}_\lambda$ の強＊－閉包

$\mathfrak{A}^s$に入る事である。

定理5.5　Hilbert bundle $(\mathcal{L}_a, \mathcal{F}, \Omega, H_\lambda)$ 上のCFCCR $\mathfrak{A}$の強＊－閉包は全可伴作用素環 $\mathfrak{A}(\mathcal{L}_a)$ である。もし$\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$が$\mathcal{L}_a$上の二つのCFCCRであれば，$\mathfrak{A}_1$の任意の operator field Aに強＊－収束する$\mathfrak{A}_2$の filter $\{B_\alpha\}$で $\| A| - |B_\alpha\| \to 0$ となるものが存在する。

今$\mathfrak{A}$を$(\mathcal{L}_a, \mathcal{F}, \Omega, H_\lambda)$上の field C^*－algebraであるとして，$\mathfrak{A}$と可換な可伴作用素全体 $\mathfrak{A}'$を考えれば，$\mathfrak{A}'$ は C^*－algebra で $C(\Omega)$を含むから，やはり field C^*－algebra である。之を$\mathfrak{A}$の Commutor とよべば$\mathfrak{A}$の second Commutor $\mathfrak{A}''$ は$\mathfrak{A}$を含む。ここで field C^*－algebra についての Von Neumann 稠密定理に相当するものを考える為に次の定義をする。

5.6　field C^*－algebra $\mathfrak{A}$は各々の $\lambda \in \Omega$ について $(\mathfrak{A}')_\lambda$ が $(\mathfrak{A}_\lambda)'$ で強＊－稠密であるとき，正則であるという。

定理5.7　もし field C^*－algebra $\mathfrak{A}$ が正則であれば $\mathfrak{A}''$は$\mathfrak{A}$の強＊－閉包である。

例として既約表現の次元が一様に有界な Hausdorff C^*－algebra $\mathfrak{A}$ を考える。$\mathfrak{A}$の dual を Ω として Ωの各点 λ で定義された normalized traceをn_λとすれば n_λ は Ω 上で連続になる。(之は$\mathfrak{A}$が Fell の意味の Continuous trace をもつという意味ではない)。Ω の点 λ に対する$\mathfrak{A}$の既約表現を$\mathfrak{A}_\lambda$として$\mathfrak{A}$自身を field space とする Euclidean bundle $(\mathcal{L}_a, \mathfrak{A}, \Omega, \mathfrak{A}_\lambda)$ を構成すれば，$\mathfrak{A}$の要素を bundle の Crosssection と考えた時の norm は次の式であたえられる。

5.8　$\|A\| = \sup\ (\|A(\lambda)\| : \lambda \in \Omega)$, $\|A(\lambda)\|^2 = n\lambda(A(\lambda)^* A(\lambda))$

$\mathfrak{A}$上への normal left representation によって，$\mathfrak{A}$は上の Euclidean の上の連続な Field C^*－algebra として表現されるが

定理5.9　上の表現による field C^*－algebra は $\mathcal{L}_a$上で正則である。更にもし$\mathfrak{A}$が単位をもてばそれは$\mathcal{L}_a$上で強＊－閉である。

field C^*－algebra が正則になる条件を求めるのは重要な問題ではあるが一般の場合をとくのは大変困難なので問題をもつと限定して考える事にしよう。

今$\mathfrak{A}$からある可換な C^*－代数 C への正値写像 φ があるとする。φ は $|\varphi(A)| \leqq |A|$ で，しかも C は φ の値域から生成されると仮定してさしつかえない。そうすれば $\mathfrak{A}$の正

値汎函数で norm が1より大きくないもの全体から函数0を除いた局所 Compact空間をPとしてCの spectrum Ω はPの閉部分空間になる。φ は C^*−form であるからそれに対する C^*−B空間 $\mathfrak{A}(\varphi)$ を考えると $\mathfrak{A}$ はその上の C^*−代数に表現される。そこで $\mathfrak{A}(\varphi)$ の C^*−modul 化 $\mathfrak{A}(\varphi) \otimes_I C$ を考え，$\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{A}(\varphi)$ への表現をその上へ induce する。この時 $\mathfrak{A}(\varphi) \otimes_I C$ Hilbert bundle $(\mathcal{L}_e, \mathcal{F}, \Omega, H_\lambda)$ の field space $\mathcal{F}$ になるが，H_λ は正値汎函数 λ によつて構成される $\mathfrak{A}$ の巡回表現の Hilbert 空間である。

逆にもし Ω がPの閉部分空間であれば $\mathfrak{A}$ から $C(\Omega)$ への正値写像が定義されるので $C = C(\Omega)$ として上のような Hilbert bundle が構成される。

さてCを加えて field C^*−algebra $\mathfrak{A}_\Omega$ を作る。この時 $\mathfrak{A}_\Omega$ が正則な場合に集合 Ω は commutor−regular であるといい更にその上に $\mathfrak{A}_\Omega \cup \mathfrak{A}_\Omega'$ が regular になる場合に Ω は center−Commutor−regular であるという。Ω が Commutor−regular または Center−Commutor−regular な為の必要十分条件を Ω が点列 $\{\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_\infty\}$ で $\lambda_n \to \lambda_\infty$ である場合について解く事が出来る。

その為にAの任意の正値汎函数 λ に対して次のように pseudo−norm λ' および λ_z を定義しよう。λ に対して構成された Hilbert 空間 H_λ の λ に対する巡回要素を同じ λ であらわせば関係

$$\lambda(A) = (A\lambda, \lambda)$$

が成立する。今 H_λ 上への表現代数 $\mathfrak{A}_\lambda$ の Commutor を $\mathfrak{A}_\lambda'$ その center を $\mathfrak{A}_z$ とする。Kが $\mathfrak{A}_\lambda'$ の要素であればKに対して $\mathfrak{A}$ 上の線型汎函数Kを

$$K(A) = (AK_\lambda, \lambda)$$

によつて定義する。このように $\mathfrak{A}_\lambda'$ を $\mathfrak{A}$ 上の線型汎函数と同一視する事により $\mathfrak{A}_\lambda'$ は $\mathfrak{A}$ の有界線型汎函数の空間と考えられるが，その単位球は weakly compact であり，従つて $\mathfrak{A}_\lambda'$ は $\mathfrak{A}$ の適当な psendo−norm λ' に対する dual space であると考えられる。同様にして $\mathfrak{A}_z$ も適当な $\mathfrak{A}$ の Pseudo−norm λ_z に対する dual space である。

定理5．10　$\lambda_n \to \lambda_\infty$ が $\mathfrak{A}$ の正値汎函数の収束する点列である時，集合 $\{\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_\infty\}$ が Commutor reguler な為の必要十分条件は λ_n' が λ'_∞ に弱収束する事である。

定理5.11　$\lambda_n \to \lambda_\infty$ が正値汎函数の Commutor regular な点列であるとき之が更に Center－Commutor regular になる為の必要且十分条件は λ_{nz} が $\lambda_{\infty z}$ に弱収束する事である。

以上の議論から我々は P の位相として，λ' の連続性を要求する Commutor 位相，更にその上に λ_z の連続性を要求する Center Commutor 位相などを考える必要がおきる。よって，今 Pseudonorm の空間 $P' = \{ \lambda' : \lambda \in P \}$，$P_z = \{ \lambda_z : \lambda \in P \}$ に弱位相を入れて考えれば

5.12　写像 $\lambda' \to \lambda$ および $\lambda_z \to \lambda$ は連続である。

5.13　写像 $\lambda \to \lambda'$ および $\lambda' \to \lambda_z$ は次の意味で上に半連続である。

$\lambda_n \to \lambda$ の時 $\overline{\lim}\ \lambda_n' \leqq \lambda_1'$ また $\lambda_n' \to \lambda'$ のとき

$$\overline{\lim}\ \lambda_{nz} \leqq \lambda_z$$

ただし pseudo－norm の列 P_n に対して $\overline{\lim}\ P_n$ は

5.14　$(\overline{\lim}\ P_n)(A) = \overline{\lim}\ P_n(A)$

によって定義される psudo norm である。

よって，P の commutor 位相とは P' の位相を P 上へ誘導したもの，又 center－commutor 位相とはこの位相に P_z を P へ誘導したものを加えた位相の事である。

定理5.15　$\mathfrak{A}$ が可分な時 P の弱位相，Commutor 位相 Center－Commutor 位相から導かれる Borel 構造は皆同一である。

定理5.16　P あるいは P の norm 1 の部分集合 P_0 は，これ等の三つの位相によって常に完備な距離空間として表わされる。特に既約な state 全体は弱位相について完備な距離空間であり，factor state 全体 $\mathcal{F}$ は Commutor 位相によって完備な距離空間である。

参 照 論 文

(1) J. Dixmier, Les algebres d'operateurs dans les l'espace hilbertien, Paris, Gauthier-Villas, (1957).

(2) ________, Traces sul les C^*-algebres. Ann. Inst. Fourier, (Glenoble), 13 (1963).

(3) ________, Champs continus d'espaces hilbertiens et de C^*-algebres I, II, J. Math. Pures Appl. (9) 42 (1963) & Bull. Soc. Math. France 91 (1963).

(4) ________, Dual et quasi-dual d'une algebre de Banach involutive, Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962).

(5) J. M. G. Fell, The structures of algebras of operator fields, Acta Math. 106 (1961).

(6) I. Gelfand & M. Naimark, On the imbedding of normed rings in the ring of operators in Hilbert space, Mat. Sbornik 12 (1943).

(7) I. Gelfand & D. A. Raikov, Irreducible representations of locally compact groups, Mat. Sbornik, 13 (1943).

(8) J. Glimm, A Stone-Weierstruss Theorem for C^*-algebras. Ann. of Math., 72 (1960).

(9) ________, Type I C^*-algebras Ann. of Math. (2) 73 (1961).

(10) N. Jacobson, Structure of rings, Amer. Math. Soc. Collq. 37 (1956).

(11) I. Kaplansky, The structure of certain operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951).

(12) G. W. Mackey. Borel structure in groups and their duals, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957).

(13) F. Murray & J. von Neumann, On rings of operators, Ann. of Math. 37 (1936).

(14) Masamichi Takesaki & Jun Tomiyama, Application of fibre bundles to the certain class of C^*-algebras, Tohoku Math. J. (2) 13 (1961).

(15) N. Steenrod, The topology of fibre bundles, Princeton Univ. press (1951).

(16) Minoru Tomita, Spectral theory of operator algebras I, II, Okayama Math J. 9 (1959).